УРОК 7

Тема: Основні поняття і аксіоми стереометрії.

Підручник з математики для 10 класу § 20-21

Доброго дня, сьогодні ви маєте ознайомитися з основними поняттями та аксіомами стереометрії.

Теоретична частина

В 7—9 класах ви познайомилися з планіметрією. Планіметрія — це розділ геометрії, в якому вивчають властивості плоских геометричних фігур: трикутників, паралелограмів, кіл тощо.

Геометричною фігурою називають будь-яку множину точок.

Точка, пряма, площина – неозначувані поняття геометрії.

Але крім плоских фігур існують і просторові фігури: прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда, циліндр, конус, куля. Багато оточуючих нас предметів мають форму прямокутного паралелепіпеда: класна кімната, цегла, сірникова коробка тощо. Популярна в усьому світі іграшка — кубик Рубик — має форму куба. Добре відомі піраміди Стародавнього Єгипту дають нам уявлення про широкий клас геометричних тіл, які називаються пірамідами.

У курсі креслення і математики 5 — 6 класів ви вчились будувати зображення цих просторових фігур. На рис. 1 зображено прямокутний паралелепіпед.

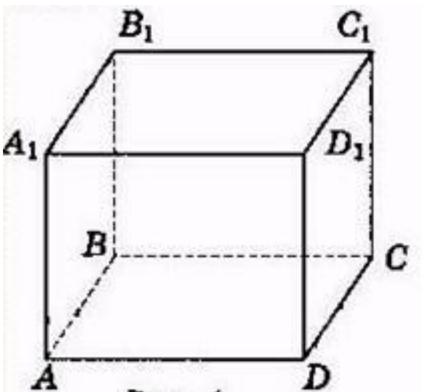


Рис. 1

Прямокутний паралелепіпед — це просторова геометрична фігура, обмежена шістьма прямокутниками, які називаються гранями. Сторони прямокутників називаються ребрами прямокутного паралелепіпеда.

Завдання.

Назвіть вершини, ребра, грані прямокутного паралелепіпеда, зображеного на рис. 1.

Розв'язання

Вершини: $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.

Ребра: $AB, BC, CD, AD, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$.

Грані: $ABCD, AA_1B_1B, B_1C_1CB, C_1D_1DC, A_1D_1DA, A_1B_1C_1D_1$.

Куб — це прямокутний паралелепіпед, у якого всі шість граней квадрати (рис. 2).

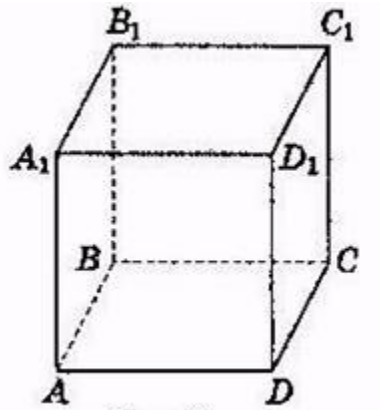


Рис. 2

Завдання.

Назвіть передню, задню, ліву, праву, верхню, нижню грані куба, зображеного на рис, 2.

Розв'язання

Передня грань:, A_1D_1DA,

Задня грань: B_1C_1CB

Ліва грань: AA_1B_1B

Права грань: C_1D_1DC

Верхня грань: $A_1B_1C_1D_1$

Нижня грань: $ABCD$

Верхню і нижню грані прямокутного паралелепіпеда називають основами, а ребра цих граней — ребрами основи, інші ребра називають бічними ребрами, а інші грані — бічними гранями.

n-кутною пірамідою називається геометричне тіло, обмежене n-кутником (який називається основою піраміди) і n трикутниками (бічними гранями) із спільною вершиною (яка називається вершиною піраміди). На рис. 3 зображено трикутну піраміду, яку ще називають тетраедром, на рис. 4 — чотирикутну піраміду.

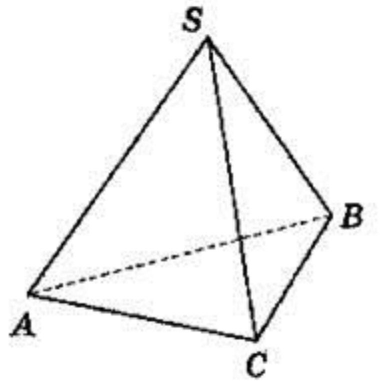


Рис. 3

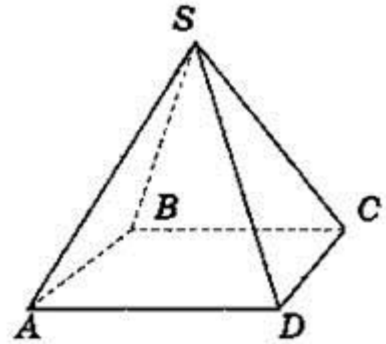


Рис. 4

Паралелепіпеди і піраміди — це представники великого класу геометричних фігур, які називаються многогранниками. Крім многогранників у геометрії розглядають і інші просторові фігури: циліндри, конуси, кулі тощо.

Розділ геометрії, в якому вивчаються властивості просторових фігур, називається стереометрією.

В 10 та 11 класах ми будемо вивчати властивості просторових фігур.

Основні поняття стереометрії

Основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина.

Уявлення про точки і прямі ви маєте з курсу планіметрії. Нагадаємо, що точки позначаються великими латинськими буквами, наприклад, точки A, B, C...; прямі позначаються малими латинськими буквами, наприклад, прямі a, b, c..., або двома великими буквами, наприклад, AB, BC, CD... Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня стола, поверхня віконного скла, поверхня мармурової плити тощо. У геометрії площину мислять необмеженою, ідеально рівною і гладенькою.

Рис. 5

Зображають площини у вигляді паралелограма (рис. 5) або у вигляді довільної області (рис. 6).

Рис. 6

Позначають площини грецькими буквами, наприклад, α, β, γ... На рис. 5 зображено площину α, на рис. 6 — площину β. Грані многогранників — це частини площин.

Як і будь-яка геометрична фігура, площина складається з точок. Якщо точка A лежить у площині α, говорять, що площина α проходить через точку A, і записують: A $\in$ α. Якщо точка А не лежить у площині α, говорять, що площина α не проходить через точку А, і записують: A $\notin$ α.

Якщо кожна точка прямої а лежить у площині α, говорять, що пряма а лежить у площині α, або площина α проходить через пряму а, і записують: а $\subset$ α. Запис а $\not\subset$ α означає, що пряма а не лежить у площині α.

Завдання.

Побудуйте та запишіть за допомогою символів:

а) площину α і точку А, що лежить у ній;

б) площину α і точку В, яка не лежить у ній;

в) площину β, яка проходить через пряму а;

г) площину γ та пряму а, яка не лежить у площині γ;

д) дві площини α і β, які проходять через пряму с.

Аксіоми стереометрії

Як і в планіметрії, властивості основних фігур у стереометрії виражаються аксіомами.

Нагадаємо, що в планіметрії властивість прямих і точок виражалася аксіомою:

Яка б не була пряма, існують точки, які належать їй, і точки, які їй не належать.

Наприклад, на рис. 3 точки А і В належать прямій АВ, а точки S і С їй не належать.

Взявши яку-небудь площину (наприклад, площину підлоги класної кімнати), ми можемо вказати точки, які належать цій площині, і точки, які їй не належать. Тому однією із властивостей площини є аксіома С1:

Яка б не була площина, існують точки, які належать цій площині, і точки, які не належать їй.

Розглянемо другу аксіому стереометрії С2:

Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

Наочною ілюстрацією цієї аксіоми є перетин двох стін, стіни і підлоги класної кімнати.

Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести площину» вживається у розумінні «існує площина».

Третя аксіома стереометрії С3 стверджує:

Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

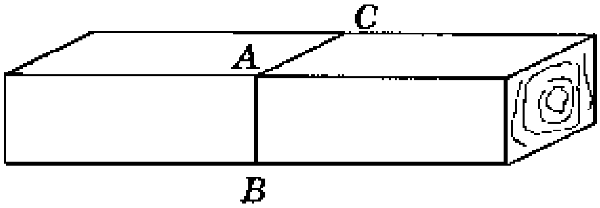


Рис. 7

4. Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині. Як він це робить?

Слід зазначити, що в просторі існує безліч площин, і для кожної площини справедливі всі аксіоми і теореми планіметрії. Більш того ознаки рівності і подібності трикутників справедливі і для трикутників, які лежать у різних площинах.

Практична частина

Завдання 1.

Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

Розв'язання

Нехай дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій a (а четверта точка D не лежить на цій прямій).

Тоді через три точки A, B, D, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину a (рис. 1. 12). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки A і B прямої a лежать у площині a, то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка

С теж лежить у площині а. Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині а, що суперечить умові.

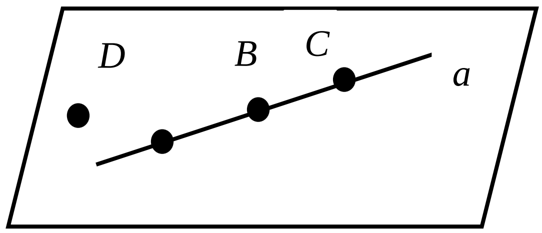


Рис. 1.12

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій.

Завдання 2.

Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.

Розв'язання

Нехай дано пряму а в просторі і точку В, яка не лежить на ній. Через пряму а і точку В проведемо площину а (за теоремою 1.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма В проходить через точку В і перетинає пряму а в точці А. Тоді точки А і В прямої В належать площині а, отже, за аксіомою 3 і вся пряма В лежить у площині а. Таким чином, усі розглядувані прямі лежать в одній площині а.

Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дані пряму і точку. Потім доведемо, що будь-яка пряма, яка перетинає дану пряму і проходить через дану точку, лежить у цій площині. Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

Виконаємо завдання з підручника:

27.7. Дано точки А, В і С такі, що АВ = 5 см, ВС = 6 см, АС = 7 см. Скільки площин можна провести через точки А, В і С?

Розв’язання

Так як $A, B, C \notin$ одній прямій, тоді через них можна провести тільки одну площину.

27.13. Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині?

Розв'язання

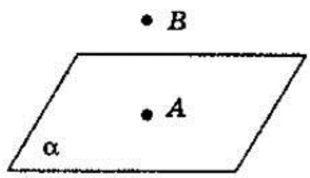
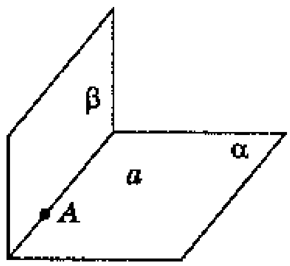
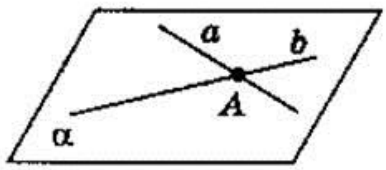
Потрібно докласти нитки від ніжок по діагоналям, якщо вони перетнуться, то ніжки лежать в одній площині, тому що дві пересічні прямі задають площину.

Домашнє завдання

Опрацювати § 20-21, с.155-167, виконати вправи №723, №725.

Підведення підсумку уроку

При підведенні підсумку уроку можна скористатися даною схемою.

Аксіоми стереометрії		
 C_1	 C_2	 C_3

Бажаю успіхів! ☺